

# Kreishomöomorphismen

Klassifizierung und Satz von Denjoy

Johannes Wenzel

Im Folgenden wird ein Beispiel von diskreten dynamischen Systemen betrachtet: Die Kreishomöomorphismen, d.h. also Abbildungen, welche homöomorph den Einheitskreis auf sich selbst abbilden. Im Zuge dessen werden verschiedene Arten der Orbits dieser Systeme klassifiziert und mit dem Satz von Poincaré und Denjoy untersucht, welche dieser Abbildungen konjugiert zu einer Rotation sind.

## 1. Die Rotationszahl

Eine zentrale Eigenschaft von Kreishomöomorphismen ist die Rotationszahl. Diese wird im Folgenden definiert. Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus. Man kann den Einheitskreis mit  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  identifizieren und so gibt es eine natürliche Projektion der reellen Zahlen auf den Einheitskreis  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, x \mapsto x + \mathbb{Z}$ . Dies gibt uns eine Hochhebung eines Homöomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  zu einem Homöomorphismus  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & S^1 \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & S^1 \end{array} \quad \text{mit} \quad f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Die Abbildung  $F$  ist dann bis auf eine ganzzahlige Konstante eindeutig bestimmt.

**Satz & Definition 1.1** (Rotationszahl). Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Hochhebung von  $f$ . Sei

$$\tau(F) := \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Dann bezeichnet  $\tau(f) := \pi(\tau(F))$  die Rotationszahl von  $f$  und es gilt  $\tau(f) < \infty$ .

*Beweis.* Wir nutzen ohne Beweis die Aussage (\*):

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Gibt es  $s, t$ , sodass  $a_{m+n} \leq a_n + a_{m+s} + t$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt, dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} < \infty$ .

Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $x_n := F^n(x)$ ,  $a_n := x_n - x$  und  $k := [a_n]$ . Wegen  $F^m(y) - F^m(z) \leq 1$ , wenn  $y - z \leq 1$  und  $x_n - x - k = a_n - [a_n] \geq 0$  und  $F(x+1) = F(x) + 1$  gilt

$$\begin{aligned} a_{m+n} &= F^{n+m}(x) - x = F^m(x_n) - x_n + x_n - x \\ &= (F^m(x+k) - (x+k)) + (x_n - x) + (F^m(x_n) - F^m(x+k)) - (x_n - x - k) \\ &\leq a_m + a_n + 1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F^{i+1}(x) - F^i(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_i) - x_i) \geq \min_{0 \leq y \leq 1} F(y) - y,$$

d.h.  $a_n/n$  ist von unten beschränkt und somit nach (\*) konvergent. Es ist darüber hinaus  $\tau(F+k) = \tau(F) + k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Beispiel 1.2:** Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $r_c : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $x \mapsto x + c \pmod{1}$ . Dann ist offenbar  $R_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + c$  und  $\tau(r_c) = c$ :

$$\tau(R_c) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{R_c^n(x) - x}{n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{x + n \cdot c - x}{n} = \frac{n}{n} \cdot c = c$$

Wir werden nun noch weitere Eigenschaft der Rotationszahl  $\tau$  betrachten, jedoch ohne Beweis:

**Proposition 1.3:** Sei  $f$  und  $F$  wie in Def. 1.1. Dann gilt:

- (i)  $\tau(F)$  ist unabhängig von  $x$ .
- (ii)  $\tau(F)$  ist bis auf eine ganze Zahl wohldefiniert und es gilt für  $F_1, F_2$ .  $\tau(F_1) - \tau(F_2) = F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}$ .
- (iii) Mit einem weiteren orientierungstreuen Homöomorphismus  $h : S^1 \rightarrow S^1$  gilt  $\tau(h^{-1}fh) = \tau(f)$ , d.h. die Rotationszahl ist invariant unter topologischer Konjugation.

**Proposition 1.4:** Sei  $f$  orientierungstreuer Homöomorphismus von  $S^1$ . Es hat  $f$  genau dann einen periodischen Punkt, wenn  $\tau(f) \in \mathbb{Q}$  gilt.

*Beweis.* Sei  $x \in S^1$  ein periodischer Punkt, das heißt es gilt für eine Hochhebung  $F$  und  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{F^{mq}(x) - x}{mq} = \frac{1}{mq} \sum_{i=0}^{n-1} F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x) = \frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}.$$

Angenommen, es gelte  $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ . Dann folgt mit der Definition der Rotationszahl

$$\tau(f^q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^q)^n(x) - x}{n} = q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{qn}(x) - x}{qn} = q \cdot \tau(f) \pmod{1},$$

d.h.  $\tau(f^q) = 0$ , da die Rotationszahl bis auf eine ganze Zahl definiert ist. Es genügt nun zu zeigen, dass wenn  $\tau(f) = 0$  gilt,  $f$  einen Fixpunkt hat.

Wir setzen nun  $h := f^q$ . Also angenommen,  $h$  hätte keinen Fixpunkt. Es sei  $H$  eine Hochhebung, sodass  $H(0) \in [0, 1)$ . Dann muss  $H(x) - x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gelten, da aus  $H(x) - x \in \mathbb{Z}$  folgen würden, dass  $\pi(x)$  ein Fixpunkt von  $h$  ist. Nach dem Zwischenwertsatz gilt also

$$0 < H(x) - x < 1$$

und da  $H - Id$  stetig auf  $[0, 1]$  ist nimmt es dort sein Minimum und Maximum an, und somit existiert ein  $\delta > 0$ , sodass

$$0 < \delta \leq H(x) - x \leq (1 - \delta) < 1$$

gilt. Wegen der Periodizität von  $H - Id$  gilt diese Ungleichung für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt auch  $\delta \leq H^i(0) \leq 1 - \delta$  für  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  und somit  $n\delta \leq \sum_{i=0}^n H(H^i(0)) \leq n(1 - \delta)$ , d.h.

$$n\delta \leq H^n(0) \leq (1 - \delta)n \quad \text{oder} \quad \delta \leq \frac{H^n(0)}{n} \leq 1 - \delta.$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt somit also  $\tau(h) \neq 0$ , d.h. die Behauptung folgt per Kontraposition. □

**Proposition 1.5:** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  orientierungstreuer Homöomorphismus mit rationaler Rotationsnummer. Dann haben alle periodischen Orbits die gleiche Periode.

## 2. Klassifizierung der Orbittypen

**Definition 2.1** ( $\omega(x)$ - &  $\alpha(x)$ -Grenzwert). Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus,  $x \in S^1$ .

Dann heißt die Menge aller Häufungspunkte der Folge  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$  die  $\omega(x, f) := \omega(x)$ -Limesmenge des Punktes  $x$ .

Die Menge  $\alpha(x)$  ist definiert durch  $\alpha(x) := \omega(x, f^{-1})$ , d.h. als die Häufungspunkte von  $(f^{-n}(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Definition 2.2** (Homo- / heteroklinischer Orbit). Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  eine orientierungstreuer Homöomorphismus. Der Orbit heißt

- (i) homoklinisch zu einer invarianten Mengen  $S \subseteq S^1 \setminus \mathcal{O}$ , wenn  $\alpha(x) = \omega(x) = S$  für alle  $x \in \mathcal{O}$  gilt.
- (ii) heteroklinisch zu zwei invarianten Mengen  $S_1$  und  $S_2$ , wenn  $\mathcal{O}$  jeweils disjunkt zu  $S_1$  und  $S_2$  ist und  $\alpha(x) = S_1$ ,  $\omega(x) = S_2$  gilt.

Wir beginnen nun die Klassifizierung der Orbits mit dem Fall der rationalen Rotationszahl. Zuerst untersuchen wir das Verhalten von periodischen Orbits.

**Proposition 2.3:** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus mit rationaler Rotationszahl  $\tau(f) = p/q$ , wobei  $p, q$  relativ prim seien. Sei nun  $\bar{x} \in S^1$ , sodass  $f^q(\bar{x}) = \bar{x}$  gilt, d.h. der Orbit in  $\bar{x}$  ist periodisch. Dann sind die Anordnungen

$$\{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots, f^{q-1}(\bar{x})\} \quad \text{und} \quad \left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \dots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}$$

gleich. Offenbar verhalten sich die periodischen Orbits von  $f$  im Falle einer rationalen Rotationszahl wie eine Rotation mit gleicher Rotationszahl.

**Proposition 2.4:** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus mit  $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ . Dann gibt es zwei Fälle von nicht-periodischen Orbits von  $f$ :

- (i) Hat  $f$  genau einen periodischen Orbit, dann ist jeder andere Punkt heteroklinisch unter  $f$  zu zwei Punkten auf dem periodischen Orbit. Diese Punkte sind verschieden, wenn die Periode größer 1 ist.
- (ii) Hat  $f$  mehr als einen periodischen Punkt, dann ist jeder nicht-periodische Punkt heteroklinisch unter  $f^q$  zu zwei Punkten auf verschiedenen periodischen Orbits.

Betrachten wir jetzt den Fall der irrationalen Rotationszahl.

**Proposition 2.5:** Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Hochhebung eines orientierungstreuer Homöomorphismuss  $f : S^1 \rightarrow S^1$  mit irrationaler Rotationszahl  $\tau(f) = \tau(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann gilt für  $m, n, a, b \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathbb{R}$

$$n\tau + a < m\tau + b \Leftrightarrow F^n(x) + a < F^m(x) + b.$$

Es zeigt sich also, dass auch im Fall der irrationalen Rotationszahl die Anordnung von Punkten erhalten bleibt.

**Proposition 2.6:** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus und  $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann ist  $\omega(x)$  unabhängig von  $x$  und  $\omega(x)$  ist entweder  $S^1$  oder an keinem Punkt dicht und perfekt, d.h. abgeschlossen und es gibt keine isolierten Punkte.

Zum Beweis dieser Proposition benötigen wir noch eine Lemma, welches jedoch nicht bewiesen wird.

**Lemma 2.7:** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus mit  $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq n$  und  $x \in S^1$ . Sei ferner  $I \subseteq S^1$  ein abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten in  $f^m(x)$  und  $f^n(x)$ . Dann trifft jeder Semiorbit  $I$ .

*Beweis von 2.6.* (i) Unabhängigkeit von  $x$ : Es ist also nötig zu zeigen, dass  $\omega(x) = \omega(y)$  für alle  $x, y \in S^1$  gilt. Sei  $z \in \omega(x)$ , dann existiert eine Folge  $l_n$  in  $\mathbb{N}$ , sodass  $f^{l_n} \rightarrow z$ . Ist nun  $y \in S^1$ , dann existiert nach 2.7 ein  $k_m \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^{k_m}(y) \in I_m := [f^{l_m}(x), f^{l_{m+1}}(x)]$ . Andererseits gilt dann aber auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{k_m}(y) = z$  und somit  $z \in \omega(y)$ . Somit gilt  $\omega(x) \subseteq \omega(y)$  für alle  $x, y \in S^1$  und somit  $\omega(x) = \omega(y)$  für alle  $x, y \in S^1$ .

(ii)  $E := \omega(x)$  ist entweder  $S^1$  oder an keinem Punkt dicht:  $E$  ist die kleinste abgeschlossene, nichtleere,  $f$ -invariante Menge, d.h. gibt es es  $A \subseteq S^1$  nichtleer, abgeschlossen und  $f$ -invariant und  $x \in A$ , dann gilt  $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq A$ , da  $A$  invariant ist und  $E = \omega(x) \subseteq A$ , da  $A$  abgeschlossen ist. Somit sind  $\emptyset$  und  $E$  die einzigen invarianten Teilmengen von  $E$  und es folgt somit  $\partial E = \emptyset$  oder  $\partial E = E$ . Im Fall  $\partial E = \emptyset$  gilt  $E = S^1$ . Wenn  $\partial E = E$  gilt, dann ist  $E$  offenbar an keinem Punkt dicht.

(iii) Es ist noch zu zeigen, dass  $E$  perfekt ist.  $E$  ist abgeschlossen. Sei  $x \in E$ , da  $E = \omega(x)$ , gibt es eine Folge  $k_n$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(x) = x$ . Da  $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , gibt es keine periodischen Punkte in dem Orbit und somit gilt  $f^{k_n}(x) \neq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $x$  als ein Häufungspunkt von  $E$ , da  $f^{k_n}(x) \in E$  wegen der Invarianz von  $f$ . □

**Definition 2.8** (Transitiv). Ein dynamisches System  $f : X \rightarrow X$  heißt transitiv, wenn es einen Punkt  $x \in X$  gibt, sodass der Orbit  $\mathcal{O}(x)$  dicht in  $X$  liegt.

**Satz 2.9** (Poincaré Klassifikation). Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl.

(i) Wenn  $f$  transitiv ist, dann ist  $f$  konjugiert zu der Rotation  $R_{\tau(f)}$ .

(ii) Wenn  $f$  nicht transitiv ist, dann hat  $f$  die Rotation  $R_{\tau(f)}$  als topologischen Faktor über eine nicht

*invertierbare monotone Abbildung  $h : S^1 \rightarrow S^1$ , d.h. es gilt in der Hochhebung  $H \circ F = R_{\tau(f)} \circ H$ .*

*Beweis.* Wir benutzen ohne Beweis, dass der Orbit einer irrationalen Rotation in jedem Punkt dicht ist (\*). Wir beginnen den Beweis mit dem Fall, dass  $f$  nicht transitiv ist.

- (i) Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $f$  und sei  $\tau := \tau(f)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $B := \{F^n(x) + m\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  die Hochhebung des Orbits von  $\pi(x)$ . Definiere

$$H : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad F^n(x) + m \mapsto n\tau + m.$$

Nach Proposition 2.5 ist diese Abbildung monoton. Dann ist  $\tau(H)$  irrational und mit (\*)  $H(B)$  dicht in  $\mathbb{R}$ . Sei  $R_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + \tau$ , dann gilt  $H \circ F = R_\tau \circ H$ , da

$$H \circ F(F^n(x) + m) = F(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\tau + m$$

und

$$R_\tau \circ H(F^n(x) + m) = R_\tau(n\tau + m) = (n+1)\tau + m.$$

- (ii) Es gibt nun (ohne Beweis) eine stetige Fortsetzung von  $H$  auf den Abschluss  $\bar{B}$  von  $B$ . Damit kann man  $H$  auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen, denn: Die Abbildung  $H : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ist monoton und surjektiv (da  $H$  monoton & stetig auf  $B$ ,  $\bar{B}$  abgeschlossen ist und  $H(B)$  dicht in  $\mathbb{R}$ ). Auf den Intervallen im Komplement von  $\bar{B}$  definiert man  $H$  als konstante Abbildung, die jeweils den Wert an dem Endpunkt des Intervalls annimmt. Somit erhält man eine Abbildung  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $H \circ F = R_\tau \circ H$  und somit eine Semikonjugation  $h : S^1 \rightarrow S^1$ , da für  $z \in B$

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\tau + m + 1 = H(z) + 1$$

gilt und diese Eigenschaft unter stetiger Fortsetzung erhalten bleibt.

- (iii) Die Behauptung des Satzes folgt nun mit der Beobachtung, dass man in dem transitiven Fall mit einem dichten Orbit anfängt und somit  $\bar{B} = \mathbb{R}$  gilt und  $h$  eine Bijektion ist.

□

**Korollar 2.10:** Wenn es unter  $f$  ein wanderndes Intervall gibt, d.h. ein  $I \subseteq S^1$ , sodass  $(f^n(I))_{n \in \mathbb{Z}}$  paarweise disjunkt, dann ist  $f$  nicht transitiv. Das liegt daran, dass im nicht transitiven Fall  $H$  außerhalb von  $\bar{B}$  konstant ist und das Urbild an diesen Stellen ein Intervall ist.

**Anmerkung** (Orbittypen und messbare Klassifizierungen): In der  $S^1$  kann ein Punkt sechs verschiedene Arten von Orbits unter Transformation haben, jeweils drei für den Fall rationale und irrationale Rotationszahl. Man erhält folgende Tabelle:

Rotationszahl $p/q \in \mathbb{Q}$	Rotationszahl $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$I_{\frac{p}{q}}$ : Periodischer Orbit mit gleicher Periode wie $R_{\frac{p}{q}}$ und gleich angeordnet wie ein Orbit von $R_{\frac{p}{q}}$ .	$I_\alpha$ : Ein Orbit dicht in $S^1$ , welcher auf gleiche Weise angeordnet ist wie ein Orbit von $R_\alpha$ .
$II_{\frac{p}{q}}$ : Ein homoklinischer Orbit, d.h. ein bestimmter periodischer Orbit wird für $n \rightarrow \pm\infty$ erreicht.	$II_\alpha$ : Ein Orbit, welcher dicht in einer Cantormenge liegt.
$III_{\frac{p}{q}}$ : Ein heteroklinischer Orbit, d.h. es werden zwei verschiedene periodische Orbits für $n \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow -\infty$ erreicht.	$III_\alpha$ : Ein Orbit homoklinisch zu einer Cantormenge

### 3. Satz von Denjoy

**Definition 3.1** (Beschränkte Variation). Sei  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x_k, x'_k\}_{k=1}^n$ , sodass  $(I_k)_{k=1}^n = ([x_k, x'_k])_{k=1}^n$  paarweise disjunkt. Dann hat  $g$  beschränkte Variation, wenn  $\text{Var}(g) = \sup \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x'_k)| < \infty$  gilt.

**Satz 3.2** (von Denjoy). Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit  $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und mit Ableitung beschränkter Variation. Dann ist  $f$  transitiv und konjugiert zu einer Rotation  $R_{\tau(f)}$ .

*Beweis.* (i) Aufgrund der beschränkten Variation von  $f'$  kann man mit  $V := \text{Var}(\varphi)$ ,  $\varphi(x) = \log |f'(x)|$ , eine Abschätzung für die Störung von  $f$  finden:

$$\exp(-V) \leq \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| \leq \exp(V)$$

(ii) Mit  $y := f^{-n}(x)$  folgt weiter  $\exp(-V) \leq (f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x) \leq \exp(V)$ .

(iii) Nun kommt der eigentliche Beweis: Die Aussage wird per Widerspruch gezeigt. Man möchte zeigen, dass im Falle der  $C^1$ -Glatte und beschränkten Variation  $f$  konjugiert zu einer Rotation ist. Angenommen, dies wäre nicht Fall. Dann ist nach dem Satz von Poincaré  $f$  nicht transitiv und  $\omega(x)$  ist perfekt und an keinem Punkt dicht. Sei nun  $I \subseteq S^1 \setminus \omega(x)$ , dann sind alle Bilder und Urbilder von  $I$  paarweise disjunkt. Mit  $a + b \geq \max(a, b) \geq \sqrt{a \cdot b}$  folgt nun

$$\begin{aligned} l(f^n(I)) + l(f^{-n}(I)) &= \int_I (f^n)'(x) dx + \int_I (f^{-n})'(x) dx = \int_I (f^n)'(x) + (f^{-n})'(x) dx \\ &\geq \int_I \sqrt{(f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x)} dx \\ &\geq \int_I \sqrt{\exp(-V)} dx = l(I) \cdot \exp\left(\frac{-V}{2}\right) \end{aligned}$$

für unendlich viel  $n \in \mathbb{N}$ . Damit folgt aber auch  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l(f^i(I)) = \infty$ , sodass  $(f^i(I))_{i \in \mathbb{Z}}$  nicht paarweise disjunkt sein können. Somit muss  $f$  transitiv und folglich konjugiert zu einer Rotation sein.  $\square$

Im Folgenden wird noch das Denjoy Gegenbeispiel betrachtet:

**Proposition 3.3:** Für  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  existiert ein nicht-transitiver  $C^1$ -Diffeomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  mit Rotationszahl  $\tau(f) = r$ .

*Beweis.* In dem Beweis wird nun ein solcher  $C^1$ -Diffeomorphismus konstruiert und dann gezeigt, dass die Iterationen bestimmter Intervalle nicht disjunkt sind.

(i) Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha = \frac{k}{k+1}$ ,  $l_n = (|n| + (2k)^k + 1)^{-(1+\frac{1}{k})}$  und  $c_n = 2(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) \geq -1$ . Dann gilt offenbar

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n < 2 \sum_{n=0}^{\infty} l_n = 2 \sum_{n=(2k)+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/k}} < 2 \int_{(2k)^k}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{1}{k}}} dx = 1.$$

- (ii) Man betrachtet nun den Orbit der  $x_n = (R_\tau)^n(x)$ . Es wird nun an jedem Punkt  $x_n$  des Orbits ein Intervall  $I_n$  der Länge  $l_n$  eingefügt. Zwischen zwei Intervall  $I_m$  und  $I_n$  ist die Distanz gerade

$$(1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n) d(x_m, x_n) + \sum_{x_k \in (x_m, x_n)} l_k.$$

Man möchte nun einen Homöomorphismus  $f$  haben, sodass  $f(I_n) = I_{n+1}$  gilt und  $f|_{S^1 \setminus \cup_n I_n}$  semi-konjugiert zu einer Rotation ist. Zu diesem Zweck genügt es,  $f'$  genauer zu beschreiben, da  $f$  dann durch Integration entsteht.

- (iii) Konstruktion von  $f$ : Definiere  $h_{a,l} : [a, a+l] \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \mapsto 1 - \frac{1}{l} |2(a-l) - l|$ , dann ist  $h_{a,l}$  eine Zeltfunktion und es gilt  $h_{a,l}(a + \frac{l}{2}) = 1$ ,  $\int_a^{a+l} h_{a,l}(x) dx = l/2$ . Es sei nun der linke Eckpunkt von  $I_n$  durch  $a_n$  gegeben und definiere

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in S^1 \setminus \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n, \\ 1 + c_n h_{a_n, l_n}(x), & \text{für } x \in I_n. \end{cases}$$

Wegen  $c_n = 2(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) = 2\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n}$  gilt dann

$$\int_{I_n} f'(x) dx = \int_{I_n} 1 + c_n \cdot h_{a_n, l_n}(x) dx = l_n + \frac{l_n}{2} \cdot c_n = l_{n+1},$$

das heißt also  $f(I_n) = I_{n+1}$ . Da die Intervalle  $(I_n)_n$  paarweise disjunkt sind, gibt es also wandernde Intervalle und somit ist  $f$  nicht transitiv und nach dem Satz von Poincaré semikonjugiert zu einer Rotation.

□

# Literaturverzeichnis

- [1] Manfred Einsiedler, Klaus Schmidt: *Dynamische Systeme*, Birkhäuser, 2013.
- [2] Anatole Katok, Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] John Milnor, *Dynamics: Introductory Lectures*, 2001.